فصل اول

عبارات جبری و معادلات و نامعادلات

۱. تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۲. بسط دوجمله‌ای و مثلث خیام- پاسکال

۳. بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

۴. معادلات

۵. معادله های دو مجذوری

۶. معادلات شامل عبارات گویا

۷. معادلات شامل عبارات گنگ

۸. حل معادلات به روش هندسی

۹. قدرمطلق و ویژگی‌های آن

۱۰. معادلات قدرمطلقی

۱۱. نامعادلات

۱۲. نامعادلات کسری (گویا)

۱۳. نامعادلات گنگ

۱۴. نامعادلات قدرمطلقی

۱۵. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

در سالهای پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای $Q(x)$ یک خارج قسمتِ $t(x)$ و باقی مانده $R(x)$ به دست می آید که درجه‌ی $R(x)$ از درجه‌ی $Q(x)$ کمتر خواهد بود و می توان نوشت:

$$P(x) = t(x)\,Q(x) + R(x)$$

تمرین در کلاس

۱- مراحل تقسیم زیر را توضیح دهید.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 + 2x^3 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
4x^4 - 4x^2 & 4x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-1}
2x^3 + 4x^2 + 1 & \\
2x^3 - 2x & \\ \cline{1-1}
4x^2 + 2x + 1 & \\
4x^2 - 4 & \\ \cline{1-1}
2x + 5 &
\end{array}$$

۲- مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده را مشخص کنید.

۳- آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟ چرا؟

$$P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1 = (4x^2 + 2x + 4)(x^2 - 1) + (2x + 5)$$

۴- مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به‌دست‌آورید.

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $Q(x)$ برابر صفر باشد، نتیجه می شود:

$$P(x) = t(x)\,Q(x)$$

در این‌حالت چندجمله‌ای $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر نامیده می شود.

غیر قابل استناد

مثال: عبارت x^3+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است، زیرا

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

فعالیت

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی‌مانده‌ی آن R باشد، در نتیجه:

$$P(x)=(x-a)t(x)+R$$

۱- درجه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم چیست؟

۲- $P(a)$ برابر چه عددی می شود؟

۳- اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه ای می توان گرفت؟

از فعالیت بالا نتیجه می شود که برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ کافی است $P(a)$ را محاسبه کنیم به ویژه اگر $P(a)$ صفر شود، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=2x^8-5x^2+x+3$ بر $x+1$ را حساب می کنیم.

$x+1$ را می توانیم به صورت $x-(-1)$ بنویسیم، پس $P(-1)$ را حساب می کنیم.

$$R=P(-1)=2(-1)^8-5(-1)^2+(-1)+3=2-5-1+3=-1$$

مسئله : باقیمانده تقسیم یک چندجمله ای $P(x)$ بر چندجمله ای $ax+b$ را چگونه می توانیم به دست آوریم؟

غیر قابل استناد

تمرین در کلاس

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

۱. عبارت $3x^2-5x+2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. ☐

۲. عبارت x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ☐

۳. عبارت x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است. ☐

۴. عبارت x^n+a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ☐

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$. ☐

ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $4x^3-2x+1$ را بر $2x-1$ تعیین کنید.

فعالیت

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- عبارت $aS-S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۲- در حالت $a\neq 1$ نتیجه بگیرید:

$$S=\frac{a^n-1}{a-1}$$

۳- اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

غیر قابل استناد

مثال: به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می کنیم.

$$A = \frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} \qquad , \qquad B = \frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{t^{10}-1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A = \frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = x^4-x^3+x^2-x+1$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت:

$$B = \frac{1+t^5}{(t^5+1)(t^5-1)} = \frac{1}{t^5-1}$$

بسط دوجمله‌ای و مثلث خیام– پاسکال

در سالهای قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ایها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ایها را به‌دست‌آورد.

فعالیت

به اتحادهای زیر توجه کنید.

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

....

۱. چه الگویی در توانهای a و b و ضرایب آنها می یابید؟

۲. با توجه به الگوی به دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می شود؟ درستی تساوی به دست آمده را مستقیما بررسی کنید.

غیر قابل استناد

هرعبارت به صورت $(a+b)^n$ که در آن $(n\in N)$ را ***دوجمله‌ای نیوتن*** و بسط آن به صورت چندجمله ای از a و b را ***بسط دوجمله‌ای نیوتن*** می گویند. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جمله آن به صورت مضربی از $a^k b^{n-k}$ است و جملاتی که از دو طرف به یک فاصله‌اند ضریب‌ها مساوی دارند.

مثلث خیام پاسکال

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن مثلث خیام- پاسکال می گویند.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{۰} \rightarrow & & & & & ۱ & & & & \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{۱} \rightarrow & & & & ۱ & & ۱ & & & \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{۲} \rightarrow & & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{۳} \rightarrow & & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & \\
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{۴} \rightarrow & ۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱
\end{array}
$$

....

مرتب نمودن ضرایب به صورت فوق را ابتدا خیام و سپس پاسکال انجام داد، به همین خاطر به نام آنها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس

۱- عناصر هرسطر مثلث خیام- پاسکال چگونه از طریق عناصر سطر قبل آن به‌دست‌می‌آیند؟

۲- چه ارتباطی بین عناصر هر سطر مثلث فوق با بسط دوجمله‌ای وجود دارد؟

۳- مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^2$ ، $(a+b)^3$ و $(a+b)^4$ را به‌دست‌آورید.
چه حدسی در رابطه با مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ می‌زنید؟

غیر قابل استناد

۴- طرف دوم هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست‌آورید.

$(2x+y)^5 =$

$(3x+2z)^4 =$

$(2a-1)^6 =$

مسائل

۱- $P(x)$ یک چندجمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالتهای زیر $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که در آن شرایط صدق کند.

الف) $P(1)=0\ ,\ P(2)=0$ ب) $P(0)=0\ ,\ P(1)=1$ ج) $P(-1)=2\ ,\ P(2)=-1$

۲- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3-mx^2-x+4$ بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۳- در چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۵- نشان دهید عبارت $x-2$ یک فاکتور(عامل) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ است. سپس معادله‌ی $f(x)=\circ$ را حل کنید.

۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=\circ$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید.

۷- دوجمله‌ای‌های زیر را بسط دهید.

الف) $(1-x)^7$ ب) $(1+\frac{2}{x})^6$ ج) $(2x-3y)^4$

۸- فرض کنید $(2+\sqrt{3})^n = 362 + b\sqrt{3}$ که در آن b یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی است. مقدار b و n را به‌دست‌آورید.

۹- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^9 - x^2y^7 \qquad , \qquad B = (a^6+1)^2 - (a^6-1)^2$$

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به دست آورید.

$$1 - x^n = (1+x)(1-x+\cdots-x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

در دوره‌ی راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارتهای جبری نیز برقرار است. با مروری بر این مفاهیم به تعمیم آن به عبارات جبری می‌پردازیم.

تجزیه عدد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می‌توان به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل‌های اول تکراری را به‌صورت توانی بنویسیم به‌آن تجزیه استاندارد می‌گوییم.

برای تجزیه‌ی یک عدد به عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به‌صورت تجزیه‌ی استاندارد می‌نویسیم.

مثال: عدد ۳۶۰ را به‌صورت تجزیه‌ی استاندارد می نویسیم.

خطی عمودی می‌کشیم و در سمت راست مقسوم علیه‌های اول عدد را می‌نویسیم و در سمت چپ خارج قسمت را و این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که به خارج قسمت ۱ برسیم.

۳۶۰	۲
۱۸۰	۲
۹۰	۲
۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	

تجزیه‌ی استاندارد $\rightarrow$ $۳۶۰ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵$

غیر قابل استناد

تمرین در کلاس

عددهای ۱۲۰ و ۵۲۵ و ۴۷ و ۱۵۰۰ را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب.م.م) :

اگر مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه های مثبت دو عدد را بنویسیم بزرگترین عدد مشترک در بین این اعداد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد نامیده می شود. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را با (a,b) نمایش می‌دهیم و به اختصار ب.م.م. a و b می نامیم.

مثال: ابتدا مقسوم علیه‌های مثبت عددهای ۳۶ و ۹۹ را بنویسید سپس بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را می یابیم.

مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت ۳۶ $= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, \underline{۹}, ۱۲, ۱۸, ۳۶\}$

مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت ۹۹ $= \{۱, \underline{۹}, ۱۱, ۹۹\}$

ب.م.م. ۳۶ و ۹۹ $= (36, 99) = 9$

تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک چند عدد

اگر هریک از اعداد را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م این اعداد خواهند بود.

مثال: ب.م.م اعداد ۳۶ و ۲۲۵ و ۴۰۵ را تعیین می کنیم.

هریک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳۶ = ۲^{۲} \times ۳^{۲} \\ ۲۲۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۲} \\ ۴۰۵ = ۳^{۴} \times ۵ \end{cases}$$

$$(36, 225, 405) = 3^2 = 9$$

غیر قابل استناد

تمرین در کلاس

ب. م.م اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به دست آورید.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

اگر مجموعه‌ی همه‌ی مضرب‌های مثبت دو عدد را بنویسیم کوچکترین عضو مشترک این دو مجموعه را کوچکترین مضرب مشترک دو عدد گوییم. کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b را با $[a,b]$ نمایش می‌دهیم و به اختصار ک.م.م. a و b می نامیم.

مثال: ابتدا مجموعه‌ی مضرب‌های مثبت دو عدد ۱۲ و ۱۵ را تعیین کنید سپس کوچکترین مضرب مشترک دو عدد را می یابیم.

مجموعه مضرب‌های مثبت ۱۲ $=\{12\,,24\,,36\,,48\,,\underline{60}\,,72\,,\ldots\}$

مجموعه مضرب‌های مثبت ۱۵ $=\{15\,,30\,,45\,,\underline{60}\,,75\,,\ldots\}$

همانطور که مشاهده می‌شود کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۵ عدد ۶۰ می‌باشد.

تعیین کوچکترین مضرب مشترک چند عدد

اگر هر یک از اعداد را به‌صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، حاصل‌ضرب‌های مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان، ک.م.م این اعداد خواهدبود.

مثال: ک.م.م اعداد $a=2^3\times5^2$ و $b=2\times5^3\times7^2$ و $c=2^5\times5\times13$ را تعیین می کنیم.

حاصل ضرب همه‌ی عامل‌های مشترک و غیرمشترک a ، b و c را به‌دست‌می‌آوریم:

$$[a,b,c]=2^5\times5^3\times7^2\times13$$

غیر قابل استناد

تمرین در کلاس

۱. ک.م.م اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.

۲. می‌خواهیم مستطیلی به ابعاد ۴۸ و ۳۶ سانتی‌متر را با کاغذهای مربع شکل که اندازه‌ی ضلع آن‌ها عدد صحیح باشد بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع مربع چه عددهایی می‌تواند باشد. کمترین تعداد کاغذ مربعی چه وقت اتفاق می‌افتد؟

۳. طول قطر چرخ کوچک و بزرگ یک تراکتور به ترتیب ۱۰۰ و ۱۶۰ سانتی‌متر است. اگر در ابتدای حرکت، نقاط روی زمین این چرخها را علامتگذاری کنیم، این تراکتور حداقل چه مسافتی را باید طی کند تا این نقاط روی چرخ‌ها مجدداً با هم به زمین برسند؟

۴. ب.م.م و ک.م.م هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایز هستند)

الف) $32a^3, 16ab^2, 8a^2b^3$

ب) $6x^2y, 8xy^2z, 10x^2y^2z^2$

ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها

در چندجمله‌ایها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخشپذیری برقرار است. پس می توانیم ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

فعالیت

چندجمله ایهای $P(x) = 2x^3 - 16$, $Q(x) = 3x^2 - 12$ را در نظر بگیرید.

۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

غیر قابل استناد

۲- بزرگترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.

۳- کوچکترین چندجمله ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

بنا به تعریف بزرگترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که چندجمله ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می نامند.

همچنین کوچکترین چندجمله ای(از لحاظ درجه) که بر چندجمله ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیرند و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می نامند.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م و یا ک.م.م دو چندجمله ای بود. این تعاریف برای بیش از دو چندجمله ای به شکل مشابه انجام می شود.

مثال: **ب.م.م و ک.م.م سه چندجمله ای $P(x)=x^3+1$ و $Q(x)=x^6-1$ و $R(x)=4x^2-4$ را تعیین می کنیم.**

ابتدا هر یک از چندجمله ایها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه در مورد ب.م.م و ک.م.م اعداد گفته شد را انجام می‌دهیم.

$$P(x)=(x+1)\,(x^2-x+1)$$
$$Q(x)=(x^3+1)\,(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$
$$R(x)=4(x^2-1)=4(x-1)(x+1)$$
$$(P(x)\ ,\ Q(x), R(x))=x+1$$
$$\left[P(x)\ ,\ Q(x), R(x)\right]=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=(x^3+1)\,(x^3-1)=x^6-1$$

ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی برای کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می کند.

تمرین در کلاس

۱. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{1}{72}+\frac{5}{48}-\frac{1}{16}$$

۲. کسرهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A=\frac{3x^2-3xy}{3(x-y)^2} \qquad B=\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$$

۳. حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$$

مسائل

۱- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف وجود دارد. اولین زنگ در هر ۱۸ دقیقه، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ در هر ۳۲ دقیقه زنگ می‌زنند. بعد از اولین بار که آن‌ها با هم زنگ می زنند حداقل چند دقیقه می‌گذرد تا آن‌ها دوباره با هم زنگ بزنند؟

۲- در یک کیسه گردو بین ۲۰۰ تا ۲۵۰ گردو وجود دارد. اگر این گردوها را چهارتا چهارتا ، پنج تا پنج تا و شش تا شش تا بشمریم در هر حالت یک گردو باقی‌می‌ماند . تعداد گردوها چندتاست؟

۳- ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟ حجم شیشه ها عدد طبیعی است.

غیر قابل استناد

۴- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

آ) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x} \div \dfrac{x^2+x-2}{x^3+2x^2}$

ب) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9} \div \dfrac{x^2-6x-7}{x^2-10x+21}$

پ) $\dfrac{1}{a^2-1} + \dfrac{2a}{a^2+2a+1} - \dfrac{2}{a+1}$

ت) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{8}{x^2+2x-3}$

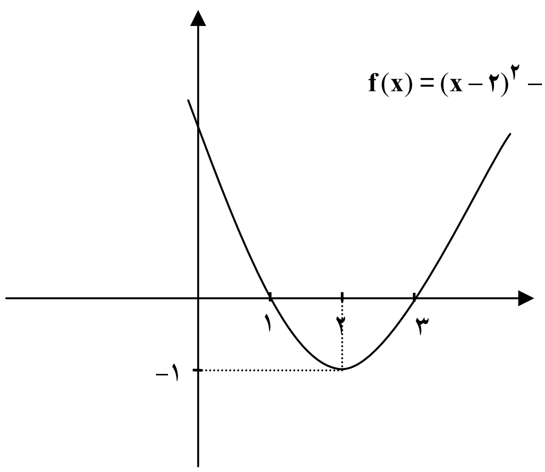
معادلات

۱. معادله‌ی درجه دوم

در سالهای قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌ی درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید در حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

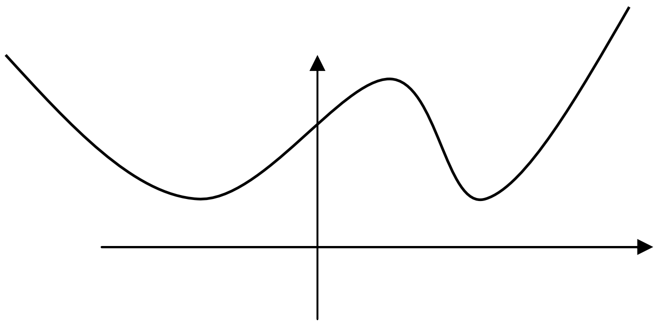
۱. نمودار تابع $f(x)=x^2-4x+3$ به شکل زیر است.



غیر قابل استناد

جوابهای معادله $f(x)=x^2-4x+3=0$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می کند؟ از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می توان در مورد جوابهای معادله $f(x)=0$ اظهارنظر کرد؟

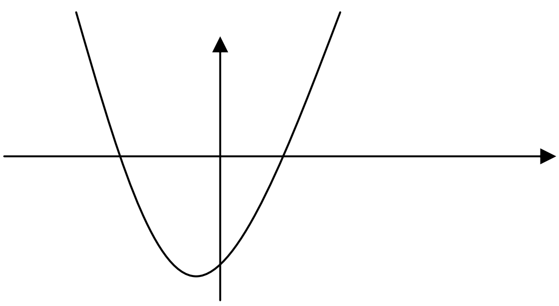
۲- نمودار تابعی مانند $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جوابهای معادله $g(x)=0$ چه می توانید بگویید؟



۳- با رسم نمودار تابع $f(x)=x^2-4x+4$ توضیح دهید چرا معادله $x^2-4x+4=0$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای یک تابع f آن مقادیری از x هستتند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور طول‌ها است.

مثال: اعداد ۲ و ۳- صفرهای تابع $f(x)=x^2+x-6$ می‌باشند و نمودار f در نقاط به طولهای ۲ و ۳- محور طولها را قطع می کند.



غیر قابل استناد

نمودار توابعی که ضابطه آنها یک چندجمله ای درجه دوم است را سهمی می نامند. این نمودارها شکلهایی مشابه و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آنها آشنا خواهید شد.

فعالیت

۱- اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، با محاسبه مستقیم نشان دهید $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$.

۲- اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$. با محاسبه مستقیم نشان دهید α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ هستند.

از نکات مطرح شده در فعالیت بالا می‌توان برای تشخیص علامت ضرایب معادله استفاد کرد.

مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S=x'+x''=2+3=5$ و $P=x'\times x''=2\times3=6$، پس ۲ و ۳ جوابهای معادله‌ی $x^2-5x+6=0$ هستند.

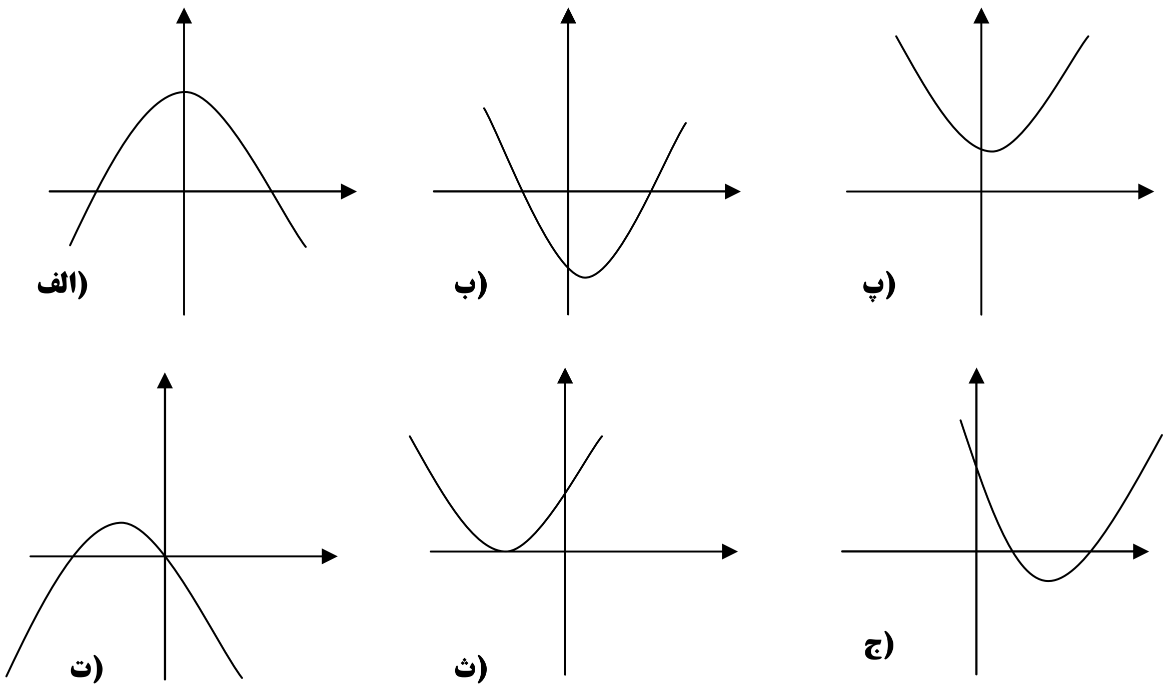
روش دوم: $(x-2)(x-3)=0$ معادله ای است که مستقیما دیده می شود ۲ و ۳ از جوابهای آن است. این یک معادله درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2-5x+6=0$ در می آید.

تمرین در کلاس

۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $\frac{-1}{2}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

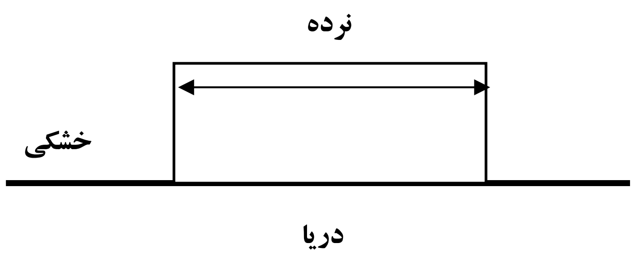
۲- در هر یک از شکل‌های زیر نمودار تابع چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a، b، c و تعداد ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را تعیین کنید.

غیر قابل استناد



<u>حل یک مسئله</u>

بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟



طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان می دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{120-x}{2}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = x(60-\frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{2}+60x$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2-120x) = -\frac{1}{2}[(x-60)^2-3600] = -\frac{1}{2}(x-60)^2+1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول ۶۰ متر بیشترین مساحت ساخته می شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

غیر قابل استناد

فعالیت

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq 0$.

۱- درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

۲- اگر $a<0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳- اگر $a>0$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت ؟

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ در حالت $a>0$ به کمترین مقدار (مینی‌مم) و در حالت $a>0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می رسد.

مثال: مینی‌مم مقدار تابع $f(x)=3x^2-12x+5$ را تعیین می کنیم.

به ازای $x=\frac{12}{6}=2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2)=-7$، کمترین مقدار تابع برابر ۷- می‌باشد.

تمرین در کلاس

نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

معادله های دو مجذوری

حل یک مسئله

معادله‌ای با ضرایب صحیح و کمترین درجه تشکیل دهید که یک جواب آن $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ باشد. برای یافن این معادله قرار می دهیم $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^2=5+2\sqrt{6}$. یکی از جوابهای این معادله $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ است ولی هنوز همه‌ی ضرایب این معادله عدد صحیح نیستند. می‌توان نوشت $x^2-5=2\sqrt{6}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^4-10x^2+1=0$

این معادله جوابهای دیری هم دارد، بقیه جوابها چه هستند؟ با در نظرگرفتن $x^2=z$ می‌توان معادله را به یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^2-10z+1=0$. با حل این معادله خواهیم داشت: $z=5\pm 2\sqrt{6}$.

حال با حل دو معادله ی $x^2=5+2\sqrt{6}$, $x^2=5-2\sqrt{6}$ خواهیم داشت:

$$x^2=5+2\sqrt{6}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \Rightarrow x=\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

با همین روش جواب‌های $x=\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ برای معادله‌ی دیگر به‌دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با درنظر گرفتن یک متغیر جدید می توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد. به این گونه معادلات؛ معادله‌ی دومجذوری گویند.

تمرین در کلاس

معادله‌ی دومجذوری $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$ را حل کنید.

غیر قابل استناد

حل یک مسئله

یکی از دانش آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله ای فکر کرده بود مسئله ای برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش آموزان مطرح کرد تا همه روی آن فکرکنند و راه حل‌های خودشان را ارائه کنند.
مسئله این بود که اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_\circ$ یک چند جمله ای درجه n باشد که $a_0\neq 0$ و از روی آن چندجمله ای درجه n، $Q(x)=a_\circ x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ را بسازیم، آیا رابطه ای بین ریشه های این دو چندجمله ای وجود دارد؟ $Q(x)$ را چندجمله ای وارون $P(x)$ می نامند.

در جلسه‌ی بعدی درس، معلم از دانش آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.
یکی از دانش‌آموزان گفت: به نظر من بهتر است ابتدا در حالتهای خاص که ساده تر است مسله را بررسی کنیم، مثلا چندجمله ایهای درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم گفت: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل یک مسئله می کند. با مشاهده‌ی مسئله د حالتهای خاص می توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پید کنیم. حال بگو چه کرده‌ای؟

دانش آموز گفت: اما من فقط توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم. در حالت چندجمله یهای درجه اول مانند $P(x)=ax+b$ داریم $Q(x)=bx+a$ و ریشه‌های آنها به ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $\frac{-a}{b}$ می‌باشند که وارون یک‌دیگرند. در حالت چندجمله‌ایهای درجه‌ی دوم محاسبات پیچیده تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

دانش‌آموزان دیگری گفت: جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چندجمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله‌ای ساده مثل $P(x)=(x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن

را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x)=x^2-x-12$. بنابراین $Q(x)=-12x^2-x+1$ باشد ریشه‌های آن از دستور کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۴}$ خواهد شد.

معلم رو به دانش‌آموزان کرد و گفت: هر دو روش بسیار ورود خوبی به مساله هستند و این حدس را تقویت می‌کند که ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید با مثال‌های دیگری این مطلب را بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چندجمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیقتری بیان کنید. مثلا برای دو چندجمله ای $P(x)=ax^2+bx+c$ و $Q(x)=cx^2+bx+a$ اگر r یک ریشه‌ی $P(x)$باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می شود؟

یکی از دانش‌آموزان گفت: پس باید از $P(r)=\circ$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r})=\circ$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه گیری امکانپذیر نخواهد بود.

معلم گفت: لابد صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می توانید این مطلب را بررسی کنید؟

دانش آموزی گفت: درست است صفر نمی تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0)=a_0\neq 0$.

معلم گفت: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r)=\circ$ حکم $Q(\frac{1}{r})=\circ$ را به دست آورید.

یکی از دانش آموزان گفت: پس فرض کنیم $P(r)=ar^2+br+c=\circ$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r})=c(\frac{1}{r})^2+b(\frac{1}{r})+a=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=\circ$$

معلم گفت: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه ای از چندجمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_\circ$ باشد آن‌گاه $P(r)=\circ$ بنابراین:

غیر قابل استناد

$$Q(\frac{1}{r}) = a_{\circ}(\frac{1}{r})^{n} + a_{1}(\frac{1}{r})^{n-1} + ... + a_{n-1}(\frac{1}{r}) + a_{n}$$
$$= \frac{1}{r^{n}}(a_{\circ} + a_{1}r + a_{2}r^{2} + ... + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n}r^{n}) = \frac{1}{r^{n}}P(r) = \circ$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$ است.

دانش آموزی گفت: آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا $P(\frac{1}{s}) = \circ$

معلم گفت: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می شود.

همانطور که مشاهده کردید برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. اما این مطلب مهم است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه حلهای خود را به دست آوریم؟

اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله‌ی کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس

مستقیماً ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = \circ$ را به‌دست‌آورید. و نشان دهید ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 + bx + a = \circ$ است.

مسائل

۱. در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = \circ$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲. صفرهای توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 4x$ ب) $g(x) = (x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x})$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

1) $\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10$

2) $2x^3 + x^2 + 3x = 0$

۴. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

ب) ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

۵. مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$

ب) $f(x) = 4 + 8x - x^2$

۶. اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ باشد.

۷. بدون حل معادله، در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۸. از دبیر ریاضی یک مدرسه سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال داشته است؟

۹. (مسأله‌ای از کتاب جبرو مقابله خوارزمی) کدام عدد(مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دوحاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

۱۰.در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصل‌ضرب را بر عدد

کوچکتر تقسیم می کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده آن ۲۲ می شود آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۱. معادلات دو مجذوری زیر را حل کنید.

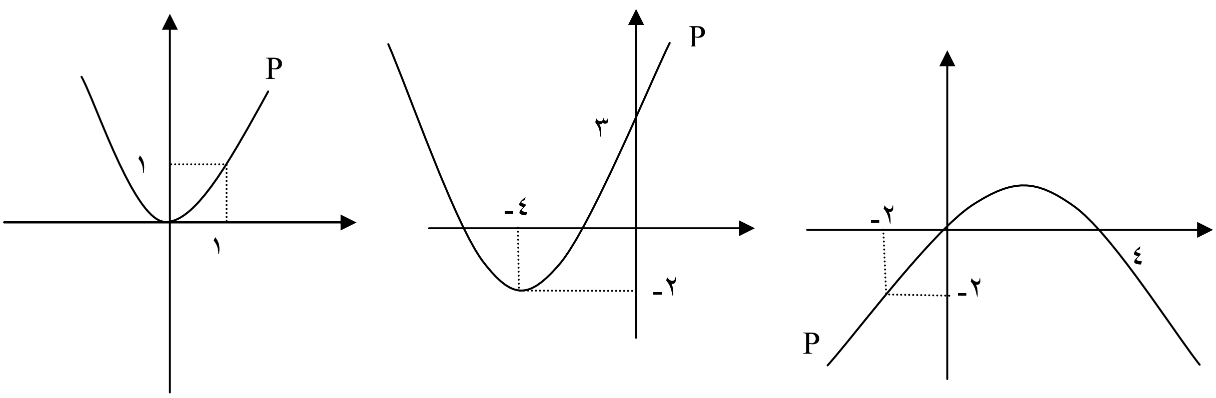
الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$

ج) $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

۱۲. کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

۱۳. اگر $P = ax^2 + bx + c$ یک عبارت درجه دوم باشد، در هر یک از حالتهای زیر اولاً علامت P را تعیین کنید ثانیاً عبارت P را مشخص کنید.



۱۴. محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه ی ابعاد زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولا درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می کند. او امروز مسئله زیر را طرح کرد.

طرح یک مسئله

«دو نقاش ساختمان که با هم کار می کنند، کار نقاشی یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، نقاش اول ۱۵ روز زودتر از نقاش دوم

کارش را تمام می کند، هر کدام از این دو نقاش به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟»

او به دانش آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آنها خواست راه حل خود را مطرح کنند.

زهرا گفت: فکر می‌کنم مسأله با تشکیل یک معادله حل می‌شود. فرض می‌کنیم نقاش اول در x روز کار را تمام کند، پس نقاش دوم کار را در ۱۵+ x روز تمام می‌کند. اما نمی توانم فرض اول مسئله را چگونه بیان کنم.

خانم تقوی گفت: این دو نقاش با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می‌دهند؟

دانش آموزان گفتند: معلوم است $\frac{۱}{۱۸}$ کار را.

سپس خانم تقوی آنها را راهنمایی کرد و گفت: حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می دهد و ببینید چگونه بین این نسبتها می توانید ارتباط برقرارکنید.

سارا گفت: فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت‌ها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18}$$

و توضیح داد در یک روز هر یک از نقاش‌ها میزان کارشان مشخص است پس اگر هر دو با هم اگر کار کنند مجموعاً $\frac{1}{18}$ کار انجام می شود. حال با حل این معادله x را می یابیم.

خانم تقوی از سارا تشکر کرد و گفت: برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم. سپس از دانش آموزان خواست روش خود را برای حل این معادله بیان کنند.

مینا گفت: ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم مخرج کردن استفاده می‌کردیم این‌جا هم می‌توانیم از روش کلی هم مخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه را که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک مخرج هاست. که در این جا همان حاصل‌ضرب مخرج‌ها می‌شود.

خانم تقوی ضمن تشکر از او خواست راه حل خود را روی تابلو بنویسد.

مینا راه حل خود را روی تابلو به صورت زیر ارائه داد:

$$\frac{x+15+x}{x(x+15)}=\frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x}=\frac{1}{18} \Rightarrow 18(2x+15)=x^2+15x$$

$$\Rightarrow \quad x^2-21x-270=\circ \Rightarrow (x-30)(x+9)=\circ \Rightarrow x=30\ ,\ x=-9$$

جواب $x=-9$ قابل قبول نیست و جواب مسئله ۳۰ روز است.

بحث در کلاس

چرا $x=-9$ با وجودی که در معادله صدق می کند، نمی تواند جواب مورد قبول باشد؟

طرح یک مسئله

احمد در یک مغازه‌ی ماهی‌های تزئینی کار می‌کند. در این مغازه ماهی‌ها در محلول آب نمک نگهداری می‌شوند. به علت تازه کار بودن کارگر، ۲۰۰ کیلو محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است در حالی که او محلول آب نمک ۷ درصدی می خواهد برای رفع این مشکل چه باید کرد؟

حالت اول– فرض می‌کنیم نمک به اندازه‌ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100}\times 200=8 \quad \text{کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $8+x$ کیلوگرم می شود و وزن کل محلول $200+x$ کیلو می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x}=\frac{7}{100}$$

با حل این معادله نتیجه می شود $x=\frac{600}{93}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۳۸۷ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.

حالت دوم– اگر نمک به اندازه‌ی کافی موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلو از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{8}{200-y}=\frac{7}{100}$$

غیر قابل استناد

با حل این معادله داریم $y=\frac{600}{7}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله که از واقعیت می آیند جور درنیایند. این جواب‌ها نیز قابل قبول نیستند.

تمرین در کلاس

۱. در حل مثال قبل اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به محلول اضافه کنیم، چند کیلو از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به هدف مورد نظر برسیم؟

۲. معادله‌ی $\frac{5}{x}-\frac{4}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید.

مثال : مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{2x+3}{2x-2}-\frac{5}{x^2-1}=\frac{2x-3}{2x+2}$ را به دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را به دست می آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases}2x-2=2(x-1)\\ x^2-1=(x-1)(x+1)\\ 2x+2=2(x+1)\end{cases}$$

ک.م.م مخرج ها $=2(x-1)(x+1)$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می کنیم.

$$(x+1)(2x+3)-5\times 2=(x-1)(2x-3)$$
$$2x^2+3x+2x+3-10=2x^2-3x-2x+3$$
$$10x-10=\circ$$
$$x=1$$

غیر قابل استناد

اما $x=1$ مخرج کسر معادله را صفر می کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

1) $\frac{t-1}{t+4}-\frac{2}{t-4}=\frac{7}{6}$

2) $\frac{3}{2x}=\frac{x+2}{x^2-3x}$

مسائل

- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

1) $\frac{6}{p}=2+\frac{p}{p+1}$

2) $\frac{k}{2-k}+\frac{2}{k}=5$

3) $2+\frac{5}{3k-1}=\frac{-2}{(3k-1)^2}$

4) $\frac{3y+5}{y^2+5y}+\frac{y+4}{y+5}=\frac{y+1}{y}$

5) $\frac{3}{m+2}+\frac{2}{m}=\frac{4m-4}{m^2-4}$

6) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{12}{x^2-9}$

۷- معلم سوال کرد مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{x+3}{x+3}=1$ چیست؟ برخی از دانش‌آموزان گفتند: $I\!R$. معلم گفت: این جواب صحیح نمی‌باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸- عماد چند اسباب بازی برای بچه‌های خود خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به‌دست آورید.

معادلات شامل عبارات گنگ

طرح یک مسأله

نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $A(3, 0)$ برابر با فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $B(-1, 0)$ باشد.

سجاد و صادق دو دانش آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.

سجاد: اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, 2a + 1)$ باشد.

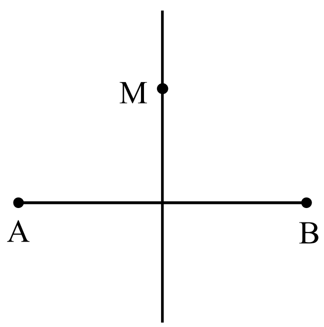
صادق: همچنین باید داشته باشیم $MA = MB$، یعنی

$$MA = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+1-0)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a+1-0)^2} = MB$$

با به توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$(a-3)^2 + (2a+1)^2 = (a+1)^2 + (2a+1)^2$$
$$a^2 - 6a + 9 = a^2 + 2a + 1$$
$$a = 1$$

سجاد: پس جواب مسئله نقطه $M(1, 3)$ است.



صادق: این مسئله را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند روی عمودمنصف پاره خط بین آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمودمنصف AB است؛ ازطرف دیگر M روی

غیر قابل استناد

خط $y = 2x + 1$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.

گاهی اوقات در حل برخی مسائل به معادلاتی برمی‌خوریم که دارای عبارهایی جبری رادیکالی از مجهول است. این گونه معادلات به **معادلات گنگ** موسومند. برای حل آنها از این نکته استفاده می کنیم که اگر $A = B$ آنگاه $A^2 = B^2$ ، یعنی طرفین یک تساوی را می‌توان به توان دو رساند. با این روش و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن به معادله‌ی بدون عبارت گنگ خواهیم رسید و آن معادله را حل می‌کنیم. سپس جواب‌های به دست آمده را در معادله‌ی اصلی آزمایش می کنیم. جواب‌هایی که در معادله‌ی اولیه نیز صدق کنند جواب‌های معادله‌ی اصلی هستند. ممکن است با این روش جوابهای اضافی ساخته شوند زیرا از $A = -B$ نیز نتیجه می شود $A^2 = B^2$.

مثال: معادله‌ی $\sqrt{۱۵ + \sqrt{۲x + ۸۰}} = ۵$ را حل می کنیم.

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$۱۵ + \sqrt{۲x + ۸۰} = ۲۵$$

$$\sqrt{۲x + ۸۰} = ۱۰$$

دوباره طرفین معادله‌ی اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت:

$$2x + 80 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

جواب به دست آمده را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{15 + \sqrt{20 + 80}} = \sqrt{15 + 10} = \sqrt{25} = 5$$

تساوی برقرار است و $x = 5$ جواب معادله می‌باشد.

مثال: آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x + \sqrt{x} = 6$ برقرار شود. یعنی

غیر قابل استناد

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$x = 36 + x^2 - 12x$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$x = 9 \quad , \quad x = 4$$

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اصلی دیده می‌شود، $x = ۹$ نمی‌تواند مورد قبول واقع باشد و تنها جواب معادله $x = ۴$ می‌باشد.

$$x = 4 \;:\quad 4 + \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 6 \qquad 4 + 2 \stackrel{?}{=} 6 \qquad 6 = 6 \quad \checkmark$$

$$x = 9 \;:\quad 9 + \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 6 \qquad 9 + 3 \stackrel{?}{=} 6 \qquad 12 \neq 6 \quad \times$$

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادله‌ی اخیر در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

1) $\sqrt{5q - 1} + 3 = ۰$

2) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x + 4}$

3) $\sqrt{3 - 3p} = 3 + \sqrt{3p + 2}$

مسائل

۱. معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{1-x^2}=x$

ب) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x$

ج) $2+\sqrt{1+x}=\sqrt{x}$

۲. در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

الف) $V=\sqrt{\dfrac{2k}{m}} \quad , \quad k=?$

ب) $F=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{LC} \quad , \quad L=?$

پ) $I=\dfrac{n\,E}{R+n\,r} \quad , \quad n=?$

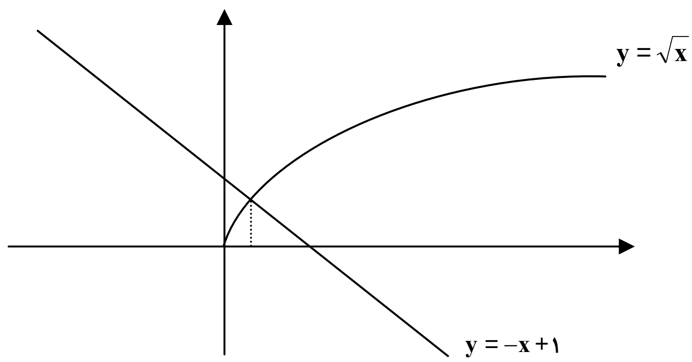
ت) $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2} \quad , \quad T_1=?$

ث) $A=p(1+i)^2 \quad , \quad i=?$

حل معادلات به روش هندسی

فعالیت

۱. نمودار دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=-x+1$ در زیر رسم شده است. اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، a در چه شرطی صدق می کند؟ برعکس اگر بدانیم عددی مانند a در چنین شرطی صدق می کند، آیا a طول یکی نقاط تلاقی دو نمودار است؟



۲. از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x}=-x+1$ فقط یک جواب دارد که درفاصله $[0,1]$ قرار دارد.

۳. مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x}=-x+1$ چیست؟

به کمک فعالیت بالا می توانیم نتیجه بگیریم:

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

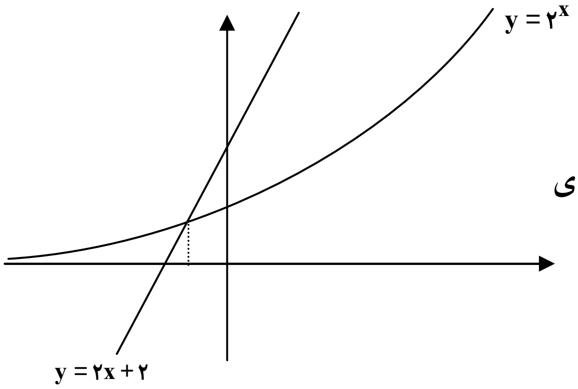
این شیوه حل معادلات را که از طریق آن تعداد جوابها و مقدار تقریبی جوابها قابل تشخیص است را روش هندسی یا نموداری حل معادلات می نامند.

غیر قابل استناد

مثال: معادله‌ی $2x + 2 = 2^x$ را به روش هندسی حل می کنیم.

کافی است نمودار توابع $y = 2^x$, $y = 2x + 2$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به دست آوریم.

از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین ۱- و صفر خواهد بود و معادله فقط همین یک جواب را دارد.

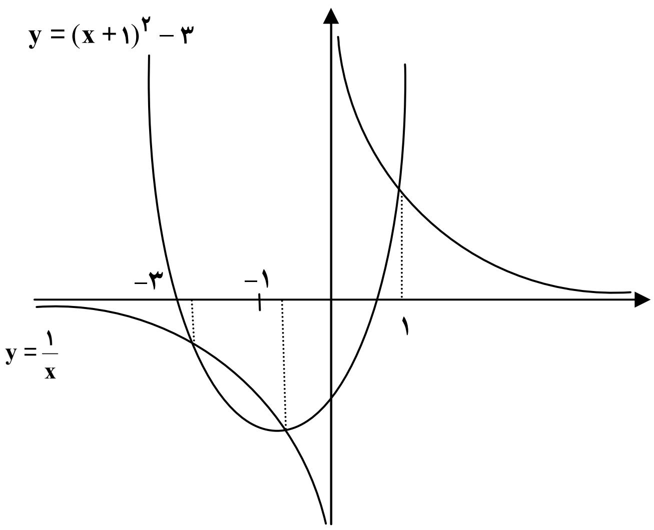


جواب این معادله را به طور دقیق نمی توانیم به دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سالهای قبل آموخته اید می توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به دست آورید.

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$ را از طریق هندسی می یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به طور دقیق تعیین می کنیم.

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را به روش نقطه یابی رسم می‌کنیم. توجه داریم که این تابع در $x = ۰$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم خواهد شد. سپس با استفاده از رسم تابع $y = x^2$ و انتقال نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 2$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم که:

$$y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$



یکی از جواب‌ها یک خواهد شد و دو جواب دیگر آن منفی خواهند بود.

غیر قابل استناد

اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به صورت $x^3+2x^2-2x-1=0$ می نویسیم و توجه می کنیم که چندجمله ای x^3+2x^2-2x-1 بر $x-1$ بخش‌پذیر خواهد است و داریم:

$$x^3+2x^2-2x-1=(x-1)(x^2+3x+1)=0$$

در نتیجه $x=1$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

تمرین در کلاس

۱. معادله $\sqrt{x+1}-x^2=2x+1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به دست آمده را مقایسه کنید.

۲. تعداد جواب‌های معادله $2x-\sin x=0$ را مشخص کنید.

۳. از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x}=x+1$ جواب ندارد.

مسائل

۱. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جوابهای دقیق را با روش جبری به دست آورید.

الف) $\sqrt{x-1}=x-3$ ب) $\dfrac{2x-1}{x-1}=5-x$

ج) $2^x=x^2$ د) $\sqrt{x}+2x=x^2+2$

۲. به روش نقطه یابی نمودار تابع $y=x^3$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=(x+1)^3$ را رسم کنید و جواب‌های معادله‌ی $(x+1)^3=3x+2$ را با روش هندسی به طور تقریبی دست آورید.

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

در سالهای قبل با مفهوم قدرمطلق و تابع قدرمطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a که آن را با $|a|$ نشان می‌دهیم برابر خود عدد a است اگر a مثبت یا صفر باشد، و برابر قرینه a است اگر a منفی باشد. این مطلب را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱- حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-2-(-3)|$ ب) $|1-\sqrt{2}|$ ج) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$

۲- عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ب) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$

۳- عبارت « فاصله‌ی بین x و a کمتر از ۰/۰۱ است را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

با توجه به تعریف قدرمطلق می‌توان عبارات قدرمطلقی را ساده نمود.

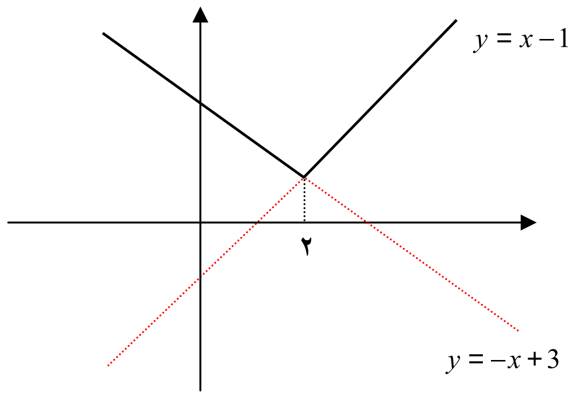
مثال: نمودار $y=|x-2|+1$ را رسم می کنیم.

با رسم تابع $y=|x|$ و انتقال آن دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا می‌توان نمودار مورد نظر را رسم نمود ولی در اینجا می خواهیم با استفاده از مفهوم قدرمطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم.

علامت مقدار $x-2$ در حالتهای $2<x$ و $x<2$ مشخص است و در حالت اول داریم $|x-2|=x-2$ و در حالت دوم داریم $|x-2|=2-x$، پس

غیر قابل استناد

$$y=|x-2|+1=\begin{cases}-x+3 & x\le 2\\ x-1 & 2<x\end{cases}$$



تمرین در کلاس

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

۱- با توجه به این که $\sqrt{a^2}=|a|$ و $\sqrt{b^2}=|b|$ نشان دهید $|ab|=|a||b|$

۲- با فرض $b\neq ۰$ و استفاده از بند ۱ ثابت کنید: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۳- اگر $|x|\le c$ $(c\ge ۰)$ با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می‌توان نتیجه گرفت: $-c\le x\le c$.

$$|x|\le c \Rightarrow |x|^2\le c^2 \Rightarrow x^2\le c^2 \Rightarrow x^2-c^2\le ۰ \Rightarrow (x-c)(x+c)\le ۰$$

x		-c		c	
$(x-c)(x+c)$	+	۰	−	۰	+

۴- اگر $c\ge ۰$ و $-c\le a\le c$ ثابت کنید $|a|\le c$.

مسائل

۱- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $|a|=|-a|$ و $|a|^2=a^2$

۲- برای هر عدد حقیقی a نشان دهید $-|a|\le a\le |a|$

۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $-|a|-|b|\le a+b\le |a|+|b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a+b|\le |a|+|b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می نامند.)

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $|y|\le|x|+|y-x|$ و نتیجه بگیرید:

$$|y|-|x|\le|y-x|$$

۵- اگر $c>۰$ و $|a|>c$ نشان دهید $a>c$ یا $a<-c$.

۶- ضابطه‌ی توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$

ب) $f(x)=|x+1|-2$

ج) $y=|x-1|+|x+2|$

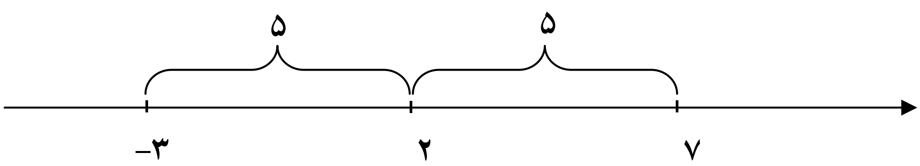
معادلات قدرمطلق

طرح یک مسئله

نقاطی روی محور اعداد حقیقی را تعیین کنید که فاصله‌اشان تا عدد ۲ برابر ۵ شود؟

برای حل این مسئله فرض‌کنید طول نقطه‌ی مورد نظر x باشد. باید داشته باشیم:

$$|x-2|=5$$



غیر قابل استناد

این معادله ای بر حسب مجهول x است. شرط $|x-2|=5$ به معنای آن است که $x-2=5$ یا $x-2=-5$. جوابهای هر کدام از این دو معادله جواب معادله $|x-2|=5$ می باشند. در نتیجه $x=7$ و $x=-3$ دو جواب آن معادله هستند.

به طور کلی می توان گفت:

جوابهای یک معادله به صورت $\|f(x)\|=\|g(x)\|$ همان جوابهای دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ رویهم هستند.

به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند *معادلات قدرمطلقی* می‌گویند.

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $|2x-3|=7$ را حل می کنیم.

جوابهای این معادله همان جوابهای دو معادله $2x-3=\pm 7$ هستند که نتیجه می شود ۵ و ۲- جوابهای آن هستند.

مثال: معادله‌ی $|x+1|=4+2x$ را حل می کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم: $0\le 4+2x$ در نتیجه $-2\le x$. حال دو معادله $x+1=\pm(4+2x)$ حل می‌کنیم.

$$x+1=4+2x \quad\Rightarrow\quad x=-3$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $-2\le x$.

$$x+1=-(4+2x) \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{5}{3}$$

این جواب قابل قبول است.

غیر قابل استناد

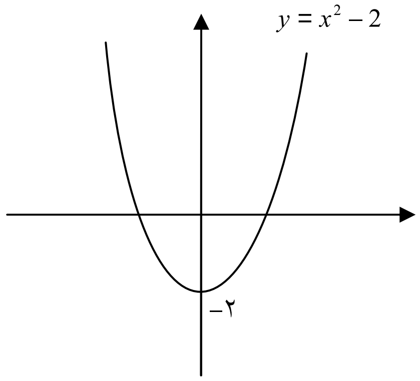
تمرین در کلاس

معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $\left|\,|x|-1\,\right|=5$ ب) $|2x-1|+|x|=7$ ج) $x|x|=-4$

فعالیت

در شکل مقابل نمودار تابع $y=x^2-2$ آمده است با توجه به آن:



۱- نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را رسم کنید.

۲- نمودار $y=2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را مشخص کنید

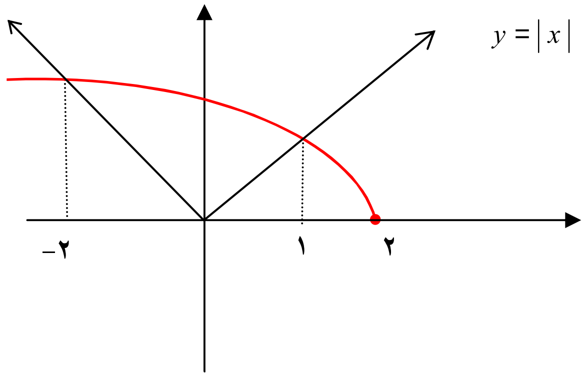
۳- جواب‌های معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را با استفاده از بند ۲ تعیین کنید.

۴- به روش جبری معادله‌ی $|x^2-2|=2$ را حل کرده و با جواب‌های به دست آمده از در بند ۳ مقایسه کنید.

مثال: به روش جبری و نموداری(هندسی) معادله‌ی $|x|=\sqrt{2-x}$ را حل می کنیم.

در روش جبری با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2=2-x$ در نتیجه $x^2+x-2=0$ که جواب‌های آن $x=-2$, $x=1$ هستند که هر دو در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

در روش هندسی نمودارهای توابع $y=|x|$ و $y=\sqrt{2-x}$ را رسم می‌کنیم. طولهای محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

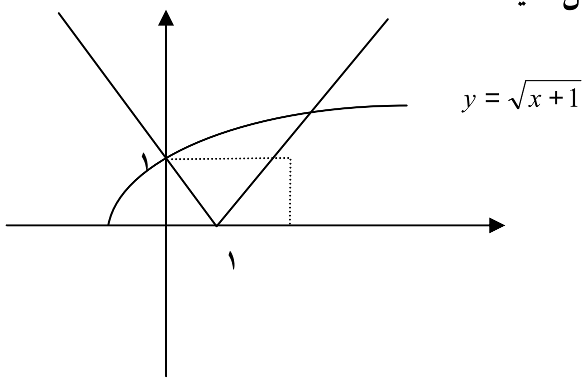


تمرین در کلاس

۱. به روش هندسی معادله‌ی $|\sin x| = \frac{1}{2}$ را در یک دوره‌ی تناوب حل کنید.

۲. معادله‌ی $|x^2 - 1| = x^2 - |x|$ را حل کنید.

۳. در شکل زیر نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ و یک تابع قدرمطلقی که نمودار متقارن دارد دیده می شود. معادله ای که جوابهای آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به روش جبری آن را حل کنید.



مسائل

۱- هریک از معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|2t-1| - 3 = 0$ ب) $|y^2 - 2| = 7$

ج) $|2x-3| = 3-2x$ د) $|x-2| + |x+1| = 3$

۲- نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = 3$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری را حل کنید.

الف) $y = |2x-4|$ ب) $y = |x| + |1-x|$

ج) $y = x + \frac{x}{|x|}$ د) $|x-2| + |y+1| = 3$

نامعادلات

نامعادلات درجه دوم

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله ایها و استفاده از آن در حل نامعادله های درجه‌ی دوم آشنا شدید. هر نامعادله‌ی درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها می‌توان حل نمود. ابتدا مروری بر آموخته‌های سال قبل خواهیم داشت.

تمرین در کلاس

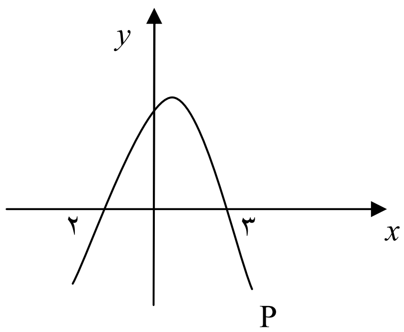
۱- هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2-5x+6\leq 0$

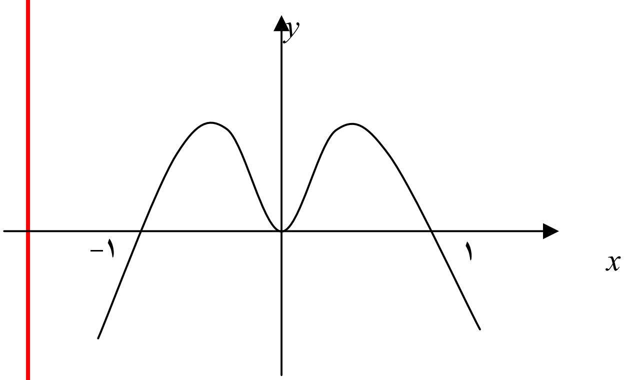
ب) $(1+x^2)(1-x^2)\leq 0$

ج) $(1-x)(x+2)>2x^2-1$

۲- در هر یک از حالتهای زیر نمودار تابعی مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادله‌ی داده شده را مشخص کنید.



$P(x)\geq 0$



$P(x)<0$

نامعادلات کسری (گویا)

هر نامعادله که عبارات تشکیل دهنده‌ی آن از عبارات کسری گویا تشکیل شده باشد، یک نامعادله‌ی گویا نامیده می شود. برای حل آن با بردن همه‌ی عبارات به یک طرف نامعادله و استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها مجموعه جواب نامعادله را می‌یابیم.

مثال: نامعادله‌ی $\frac{3+2x}{4-2x}<1$ را حل می کنیم.

$$\frac{3+2x}{4-2x}-1<0$$

$$\frac{3+2x-4+2x}{4-2x}<0$$

$$\frac{4x-1}{4-2x}<0$$

$$4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$4-2x=0 \Rightarrow x=2$$

x		$\frac{1}{4}$	2
$4x-1$	-	+	+
$4-2x$	+	+	-
$P=\frac{4x-1}{4-2x}$	-	+	-
	جواب	تعریف نشده	جواب

$$\text{مجموعه جواب}=\{x \mid x\in\mathbb{R} , x<\frac{1}{4} \ \text{یا}\ x>2\}$$

تمرین در کلاس

نامعادلات زیر را حل کنید.

۲) $\frac{1}{x^2+x+1}<1$

۱) $1-\frac{1}{x}<x+1$

نامعادلات گنگ

نامعادلاتی که در آنها عبارتهای رادیکالی حضور دارد نامعادلات گنگ می نامند. روش حل این گونه نامعادلات شبیه روش حل معادلات گنگ است و سعی می شود با به توان رساندن های مناسب عبارتهای رادیکالی حذف شوند. اما در نامعادلات باید دقت بیشتری داشته باشیم، زیرا باید پرسید: آیا حق داریم طرفین یک نامساوی را به توان ۲ برسانیم، به عبارت دیگر آیا نامساوی

غیر قابل استناد

$a<b$ معادل است با نامساوی $a^2<b^2$؟

با ارائه چند مثال نشان دهید این دو نامساوی معادل نیستند و ممکن است یکی درست و دیگری نادرست باشد. اما اگر a و b هر دو مثبت باشند این دو نامساوی معادل هستند، به عبارت دیگر طرفین یک نامساوی بین اعداد مثبت را می توان به توان ۲ رساند و نامساوی به همان شکل باقی می ماند.

برای حل نامعادلات شامل عبارات رادیکالی ابتدا دامنه‌ی تعریف نامعادله را مشخص می‌کنیم. سپس با توجه به علامت عبارتهای طرفین با به توان رساندن طرفین نامعادله و حذف عبارت رادیکالی، نامعادله را با توجه به شرایط حاکم بر آن (دامنه‌ی متغیر) حل می‌کنیم.

مثال: نامعادله‌ی $\sqrt{2x+7}<x+2$ را حل می کنیم.

روشن است که یکی از شرایط حل این نامعادله نامنفی بودن $2x+7$ است پس باید $\frac{-7}{2}\le x$.

همچنین طرف دوم نامعادله مقداری مثبت باید باشد، پس باید $-2<x$. با این شرایط طرفین نامعادله مثبت هستند و می توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم. داریم:

$$2x+7<x^2+4x+4$$
$$0<x^2+2x-3$$
$$P=x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

x		-۳		۱	
x^2+2x-3	$+$		$-$		$+$
	جواب				جواب

البته این جوابها وقتی قابل قبول هستند که شرط $-2<x$ نیز برآورده شود. بنابراین مجموعه جواب بازه $(1,+\infty)$ خواهد بود.

تمرین در کلاس

نامعادله‌ی $\sqrt{x^۲-x-۱۲}<x$ را حل کنید.

نامعادلات قدرمطلقی

نامعادلاتی که دارای عبارتهای قدرمطلقی هستند، نامعادلات قدرمطلقی می نامند. برای حل این گونه نامعادلات عموما از دو خاصیت مهم قدر مطلق استفاه می کنند.

اگر k عددی مثبت باشد نامساوی $|u| \le k$ معادل است با $-k \le u \le k$ و نامساوی $|u| \ge k$ معادل است با آن که $u \ge k$ برقرار باشد یا $-u \ge k$ برقرار باشد.

مثال: **نامعادله‌ی $|2x-1| \le 7$ را حل می کنیم.**

$$\begin{aligned} &|2x-1| \le 7 \\ &-7 \le 2x-1 \le 7 \\ &-6 \le 2x \le 8 \\ &-3 \le x \le 4 \end{aligned}$$

مجموعه جواب بازه $[-3\,,4]$ می‌باشد.

مثال: **نامعادله‌ی $|6-3x| \ge 5$ را حل می کنیم.**

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جوابهای دو نامعادله $6-3x \ge 5$ و $-(6-3x) \ge 5$ است. مجموعه جواب اولی بازه $(-\infty\,,\,\frac{1}{3}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{11}{3}\,,\,\infty)$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

مثال: **نامعادله‌ی $|2x+1| \ge 3$ را حل می کنیم.**

این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &(2x+1)^2 \ge 9 \\ &4x^2+4x+1 \ge 9 \\ &4x^2+4x-8 \ge 0 \\ &x^2+x-2 \ge 0 \\ &(x+2)(x-1) \ge 0 \end{aligned}$$

برای حل نامعادله‌ی اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

غیر قابل استناد

x		-۲		۱	
$P=(x+2)(x-1)$	+	•	−	•	+
	جواب	جواب		جواب	جواب

$(-\infty\ ,-2\ ]\cup[\ 1\ ,+\infty)$ = مجموعه جواب

تمرین در کلاس

مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

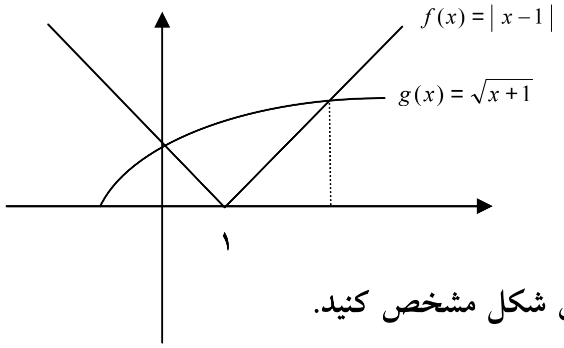
الف) $|\ x-1\ |\leq\sqrt{x+1}$

ب) $|\ 2-3x\ |>5$

حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

فعالیت

در شکل زیر نمودار توابع $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ رسم شده است.



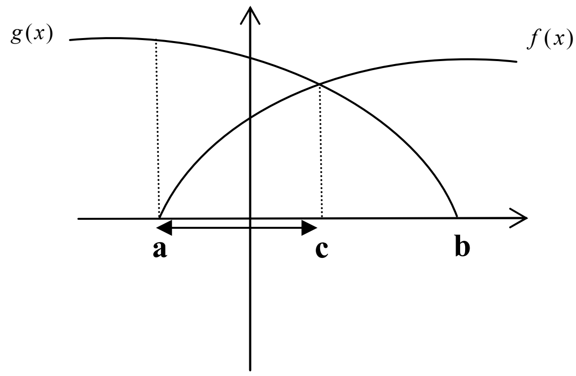
۱- مجموعه نقاط x که $f(x)\leq g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

۲- مجموعه نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد را مشخص کنید.

۳- این دو مجموعه چه رابطه ای با هم دارند؟

غیر قابل استناد

یک نامعادله دلخواه را می توان به شکل $f(x) \le g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد. اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقا برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می گیرد.



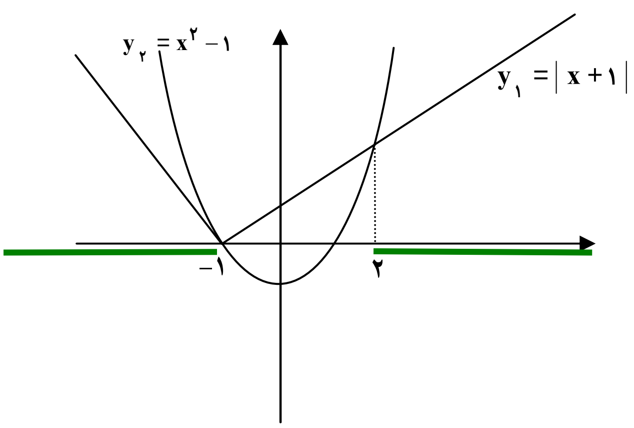
برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x) < g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه مشترک دو تابع را مشخص می کنیم که عرض نقاط تابع f از عرض نقاط تابع g کمتر باشد. در شکل بالا دامنه‌ی مشترک دو تابع $[a,b]$ می‌باشد. فقط در بازه‌ی (a,c) ، عرض نقاط منحنی f از عرض نقاط منحنی g کمتر است، پس جواب نامعادله بازه‌ی (a,c) می‌باشد.

مثال: نامعادله‌ی $|x+1| < x^2 - 1$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل می کنیم.

نمودار توابع $y_1 = |x+1|$ و $y_2 = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم.

باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار y_1 زیر نمودار y_2 واقع شده باشد.

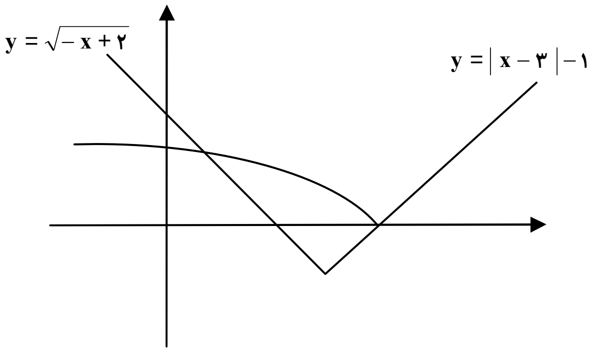
اجتماع دو بازه $(-\infty , -1)$ و $(2 , \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.



غیر قابل استناد

تمرین در کلاس

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادله‌ی $\sqrt{-x+2} \geq |x-3|-1$ را حل کنید.



مسائل

نامعادلات زیر را حل کنید.

1) $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$

2) $\dfrac{2x-1}{x} > 1$

3) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x-1} \leq 2$

4) $\sqrt{x} < x-1$

5) $|x-2| \leq x$

6) $\sqrt{x} < |x+1|$

7) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} \geq 2$

به روش نموداری (هندسی) مجموعه جواب نامعادلات زیر را به دست آورید.

8) $x^2 \leq 2^x$

9) $\sqrt{x-1} < |x-1|$

10) $\dfrac{1}{x} < \sqrt{x}$